Matemáticas

3.º de ESO

Teorema de Tales y semejanza

Razón de semejanza, triángulos en posición de Tales, escalas y alturas medidas con sombras. Con solucionario razonado.

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y distinto tamaño: sus ángulos son iguales y sus lados, **proporcionales**. El número por el que se multiplica cada lado es la **razón de semejanza, k**.

El **teorema de Tales** dice que si dos rectas secantes se cortan con rectas **paralelas**, los segmentos que quedan en una son proporcionales a los que quedan en la otra.

Dos triángulos están en **posición de Tales** cuando comparten un ángulo y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos. Entonces son semejantes.

Cuidado con lo que crece: si los lados se multiplican por k, **los perímetros también por k**, pero **las áreas por k^2** y los volúmenes por k^3.

Una **escala** 1:n significa que 1 unidad del plano son n unidades reales.

Trucos

La proporción se escribe siempre en el mismo orden. Pequeño entre grande a la izquierda y pequeño entre grande a la derecha. Si mezclas el orden en un lado, el resultado sale al revés sin que te des cuenta.

Para saber si dos triángulos son semejantes, divide. Ordena los lados de menor a mayor en los dos y divide cada pareja. Si los tres cocientes coinciden, son semejantes; si uno falla, no.

Semejanza es multiplicar, nunca sumar. Un triángulo de lados 3, 4 y 5 no es semejante al de 5, 6 y 7, aunque a cada lado se le hayan sumado dos.

En las escalas, cambia de unidades al final. Primero multiplica por la escala en centímetros y después pasa a metros o kilómetros. Mezclar unidades a mitad de cuenta es el error más frecuente.

Para el adulto. El k^2 de las áreas es el fallo estrella de la unidad y aparece en pruebas externas. Merece la pena comprobarlo dibujando: un cuadrado de lado 2 no tiene el doble de superficie que uno de lado 1, sino el cuádruple, y se ve.

1. ¿Son semejantes? Si lo son, da la razón de semejanza.

a) Lados 3, 4, 5 y lados 6, 8, 10 _____

b) Lados 4, 6, 8 y lados 6, 9, 12 _____

c) Lados 2, 3, 4 y lados 4, 6, 7 _____

2. **Teorema de Tales. Dos rectas secantes están cortadas por rectas paralelas. Calcula x.**

a) En una recta los segmentos miden 4 y 6; en la otra, 6 y x. x = _____

b) En una recta los segmentos miden 5 y x; en la otra, 10 y 14. x = _____

3. **Posición de Tales. En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo a BC, con D en AB y E en AC.**

a) Si AD = 3, DB = 6 y AE = 4, ¿cuánto mide EC? EC = _____

b) Si además BC = 15, ¿cuánto mide DE? DE = _____

4. **Escalas. En un plano a escala 1:200, una habitación mide 2,5 cm × 3 cm.**

a) Medidas reales: _____ m × _____ m

b) Superficie real: _____ m^2

5. **Dos polígonos son semejantes con razón k = 3. El pequeño tiene 12 cm de perímetro y 8 cm^2 de área.**

a) Perímetro del grande: _____ b) Área del grande: _____

6. **Mapas. En un mapa a escala 1:50 000:**

a) Dos pueblos están a 6 cm. Distancia real: _____ km

b) Dos puntos están a 7,5 km en la realidad. Distancia en el mapa: _____ cm

7. **Caza el error. Explica el fallo y corrige.**

a) «Si la razón de semejanza es 2, el área también se multiplica por 2.» Error: _____ Bien: _____

b) «Los triángulos de lados 3, 4, 5 y 5, 6, 7 son semejantes, porque a cada lado le he sumado 2.» Error: _____

8. **Problema de sombras. A la misma hora, un palo vertical de 2 m proyecta una sombra de 1,5 m y un árbol proyecta una sombra de 9 m. ¿Cuánto mide el árbol?**

Planteamiento: _____ Altura: _____

9. **Problema del espejo. Una persona cuyos ojos están a 1,60 m del suelo se coloca a 2 m de un espejo tumbado en el suelo y ve en él la parte más alta de un edificio situado a 25 m del espejo. ¿Qué altura tiene el edificio?**

Planteamiento: _____ Altura: _____

El reto

Las fotocopiadoras pasan de **A4 a A3** con la ampliación al **141 %**. Un A4 mide 21 × 29,7 cm.

1. **Multiplica los dos lados del A4 por 1,41. ¿Qué medidas salen?**

2. **Calcula el área del A4 y la del A3 (29,7 × 42 cm). ¿Cuántas veces cabe el A4 en el A3?**

3. **Si el área se duplica, ¿por qué la máquina no amplía al 200 %?**
   Pista: si las áreas se multiplican por k^2, ¿qué número al cuadrado da 2?

Solucionario

Ejercicio 1: a) **sí, k = 2**: 6/3 = 8/4 = 10/5 = 2 b) **sí, k = 1,5**: 6/4 = 9/6 = 12/8 = 1,5 c) **no**: 4/2 = 2 y 6/3 = 2, pero 7/4 = 1,75.

Ejercicio 2: a) 4/6 = 6/x → **x = 9** b) 5/10 = x/14 → **x = 7**.

Ejercicio 3: a) AD/DB = AE/EC → 3/6 = 4/EC → **EC = 8** b) AB = 9, y DE/BC = AD/AB → DE/15 = 3/9 → **DE = 5**.

Ejercicio 4: a) 2,5 · 200 = 500 cm y 3 · 200 = 600 cm → **5 m × 6 m** b) **30 m²**. Comprobación por escala de áreas: 7,5 cm² · 200² = 300 000 cm² = 30 m².

Ejercicio 5: a) 12 · 3 = **36 cm** b) 8 · 3² = **72 cm²**.

Ejercicio 6: a) 6 · 50 000 = 300 000 cm = **3 km** b) 7,5 km = 750 000 cm; 750 000 : 50 000 = **15 cm**.

Ejercicio 7: a) el área se multiplica por **k² = 4**, no por 2 b) la semejanza **multiplica** los lados por un mismo número; sumar la misma cantidad cambia la forma. 5/3 ≠ 6/4 ≠ 7/5.

Ejercicio 8: los triángulos palo-sombra y árbol-sombra son semejantes: h/9 = 2/1,5 → **h = 12 m**.

Ejercicio 9: por la reflexión, los dos triángulos son semejantes: h/25 = 1,60/2 → **h = 20 m**.

El reto: 1) unos **29,6 × 41,9 cm**, prácticamente el A3 2) 623,7 cm² frente a 1247,4 cm²: **el doble** 3) para duplicar el área, k² = 2, así que **k = √2 ≈ 1,41**. Al 200 % el área se multiplicaría por 4.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Decide si dos triángulos son semejantes. C [ ] EP [ ] NC [ ]
2. Aplica el teorema de Tales a segmentos. C [ ] EP [ ] NC [ ]
3. Resuelve triángulos en posición de Tales. C [ ] EP [ ] NC [ ]
4. Usa escalas en planos y mapas. C [ ] EP [ ] NC [ ]
5. Aplica k² a áreas de figuras semejantes. C [ ] EP [ ] NC [ ]
6. Plantea un problema de alturas con semejanza. C [ ] EP [ ] NC [ ]

Cómo leer el conjunto

El 1c es la prueba de que se ha entendido la definición: dos cocientes iguales no bastan, tienen que coincidir los tres. Quien comprueba solo dos y concluye «semejantes» necesita volver al truco de dividir todos.

El 5b y el 7a miden lo mismo desde dos lados: el crecimiento de las áreas. Si aciertan el cálculo pero no detectan el error del 7a, lo han hecho de memoria.

El 8 y el 9 son el mismo razonamiento con dos montajes distintos. Si sale el 8 y no el 9, la dificultad está en ver los triángulos, no en la proporción: ayuda mucho dibujarlos.