Matemáticas

4.º de ESO

Polinomios: Ruffini y factorización

Valor numérico, operaciones, regla de Ruffini, teorema del resto y factorización paso a paso. Vale para Matemáticas A y B. Con solucionario razonado.

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

El **valor numérico** de un polinomio P(x) en x = a es el número que sale al sustituir x por a. Se escribe P(a).

La **regla de Ruffini** divide un polinomio entre (x − a) usando solo los coeficientes. Hay que ordenarlos de mayor a menor grado y **escribir un 0 donde falte un término**.

Teorema del resto: el resto de dividir P(x) entre (x − a) es P(a). Si P(a) = 0, a es una **raíz** y (x − a) es un **factor** del polinomio.

Las **raíces enteras** de un polinomio de coeficientes enteros están entre los **divisores del término independiente**. Son los únicos candidatos que hay que probar.

Factorizar es escribir el polinomio como producto de factores lo más sencillos posible. Primero se saca **factor común**, después se buscan **identidades notables** y, si no basta, se aplica **Ruffini**.

Trucos

Las identidades notables ahorran medio examen. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Reconocerlas al revés es factorizar sin Ruffini.

En Ruffini, (x + 2) se divide con −2. El número que se pone a la izquierda es la raíz, con el signo cambiado respecto al paréntesis.

Cuando el cociente es de grado 2, pasa a la fórmula. No hace falta seguir probando divisores: la ecuación de segundo grado da las dos raíces que faltan, o dice que no hay más.

Comprueba multiplicando. Una factorización se revisa desarrollando los factores. Si vuelve el polinomio original, está bien.

Para el adulto. La factorización es la base de las fracciones algebraicas, las inecuaciones y las funciones de 1.º de Bachillerato. Si el 5 no sale con soltura, merece la pena repetirlo antes de avanzar: es la herramienta que más se usa después.

1. Valor numérico. Si $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, calcula:

a) P(2) = ____ b) P(−1) = ____ c) P(0) = ____

2. Opera y simplifica.

a) $(x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - x + 4)$ = _____

b) $(x + 2)(x^2 - x + 3)$ = _____

c) $(x - 3)^2$ = _____ d) $(2x + 1)(2x - 1)$ = _____

3. **Divide por Ruffini. Escribe el cociente y el resto.**

a) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$ Cociente: _____ Resto: ____

b) $(2x^3 + 3x^2 - 5) : (x + 1)$ Cociente: _____ Resto: ____

4. **Teorema del resto. Sin dividir:**

a) Resto de $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 1)$ = ____

b) Resto de $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x + 2)$ = ____

c) ¿Para qué valor de k es $x^3 + kx - 6$ divisible entre $(x - 2)$? k = ____

5. **Factoriza.**

a) $x^2 - 9$ = _____ b) $x^2 - 6x + 9$ = _____

c) $x^3 - 4x$ = _____ d) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ = _____

e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ = _____

6. **Caza el error. Explica el fallo y corrige.**

a) «$(x + 3)^2 = x^2 + 9$» Error: _____ Bien: _____

b) «Las raíces de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ son 2, 3 y 1.» Error: _____ Bien: _____

7. **Simplifica la fracción algebraica factorizando numerador y denominador.**

$(x^2 - 9) / (x^2 + 6x + 9)$ = _____

8. **Problema. De una lámina de cartón cuadrada de 20 cm de lado se recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y se doblan los bordes para hacer una caja sin tapa.**

a) Escribe el volumen V(x) como polinomio desarrollado. V(x) = _____

b) Calcula V(2), V(3), V(4) y V(5). ¿Con qué x entera cabe más? _____

9. **Problema. Busca tres números enteros consecutivos cuyo producto sea 120. Llama x al menor, escribe la ecuación como polinomio igualado a cero y resuélvela con Ruffini.**

Planteamiento: _____ Números: _____

El reto

Construye un polinomio de **grado 3**, con coeficiente principal 1, cuyas raíces sean **1, −2 y 3**.

1. **Escríbelo como producto de factores.**

2. **Desarróllalo.**

3. **Compáralo con el ejercicio 5e. ¿Qué observas?**

4. **Multiplica las tres raíces y compara con el término independiente. ¿Por qué crees que las raíces enteras se buscan entre sus divisores?**
   Factorizar y desarrollar son el mismo camino recorrido en dos sentidos. Quien ve eso deja de probar divisores al azar.

Solucionario

Ejercicio 1: a) $8 - 8 + 6 - 4 = \mathbf{2}$ b) $-1 - 2 - 3 - 4 = \mathbf{-10}$ c) $\mathbf{-4}$, el término independiente.

Ejercicio 2: a) $\mathbf{3x^2 + 2x + 3}$ b) $x^3 - x^2 + 3x + 2x^2 - 2x + 6 = \mathbf{x^3 + x^2 + x + 6}$ c) $\mathbf{x^2 - 6x + 9}$ d) suma por diferencia: $\mathbf{4x^2 - 1}$.

Ejercicio 3: a) coeficientes 1, −4, 1, 6 con 2: cociente $\mathbf{x^2 - 2x - 3}$, resto **0** b) coeficientes 2, 3, **0**, −5 con −1: cociente $\mathbf{2x^2 + x - 1}$, resto $\mathbf{-4}$. Comprobación: $P(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$.

Ejercicio 4: a) $P(1) = 1 - 3 + 2 = \mathbf{0}$: es divisible b) $P(-2) = 16 - 12 + 2 = \mathbf{6}$ c) $8 + 2k - 6 = 0 \rightarrow \mathbf{k = -1}$.

Ejercicio 5: a) diferencia de cuadrados: $\mathbf{(x - 3)(x + 3)}$ b) cuadrado de una diferencia: $\mathbf{(x - 3)^2}$ c) factor común y diferencia de cuadrados: $\mathbf{x(x - 2)(x + 2)}$ d) con el 3a y la fórmula para $x^2 - 2x - 3$: $\mathbf{(x - 2)(x - 3)(x + 1)}$ e) $P(1) = 0$; Ruffini con 1 da $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$: $\mathbf{(x - 1)(x - 3)(x + 2)}$.

Ejercicio 6: a) falta el doble producto: $\mathbf{x^2 + 6x + 9}$ b) el factor $(x + 1)$ corresponde a la raíz $\mathbf{-1}$, no a 1. Comprobación: $P(1) = 4$ y $P(-1) = 0$. Las raíces son **2, 3 y −1**.

Ejercicio 7: $(x - 3)(x + 3) / (x + 3)^2 = \mathbf{(x - 3)/(x + 3)}$, para $x \neq -3$.

Ejercicio 8: a) $V(x) = x(20 - 2x)^2 = \mathbf{4x^3 - 80x^2 + 400x}$ b) $V(2) = 512$, $V(3) = 588$, $V(4) = 576$, $V(5) = 500$: con $\mathbf{x = 3\ cm}$ cabe más, $\mathbf{588\ cm^3}$.

Ejercicio 9: $x(x + 1)(x + 2) = 120 \rightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 120 = 0$. Con Ruffini, $x = 4$ da resto 0 y queda $x^2 + 7x + 30$, que no tiene raíces reales. Los números son **4, 5 y 6**.

El reto: $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = \mathbf{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$, el mismo polinomio del 5e. El producto de las raíces es −6 y el término independiente 6: al desarrollar, el término independiente sale de multiplicar las raíces (con el signo cambiado en grado 3), y por eso cada raíz entera divide al término independiente.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Calcula el valor numérico de un polinomio. C [ ] EP [ ] NC [ ]
2. Opera polinomios e identidades notables. C [ ] EP [ ] NC [ ]
3. Divide con Ruffini, con ceros donde falten términos. C [ ] EP [ ] NC [ ]
4. Aplica el teorema del resto. C [ ] EP [ ] NC [ ]
5. Factoriza un polinomio de grado 3. C [ ] EP [ ] NC [ ]
6. Plantea un problema con polinomios. C [ ] EP [ ] NC [ ]

Cómo leer el conjunto

El 3b tiene un término que falta a propósito. Si el cociente sale mal, casi siempre es porque no se ha escrito el 0: es el fallo número uno de Ruffini.

El 6b es la confusión entre factor y raíz: $(x + 1)$ se anula en -1. Quien lo detecta tiene el concepto; quien no, está aplicando Ruffini sin saber qué busca.

El 8 conecta los polinomios con una situación real y anticipa la optimización de Bachillerato. No hace falta más que sustituir, pero obliga a leer qué significa x en la caja.