Matemáticas

4.º de ESO

Logaritmos

Definición, propiedades, cambio de base y ecuaciones exponenciales, con problemas de interés, bacterias y pH. Pensada para Matemáticas B. Con solucionario razonado.

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

El **logaritmo** en base a de un número N es el exponente al que hay que elevar a para obtener N: **$\log_a N = x$ significa $a^x = N$**. Por eso $\log_2 8 = 3$, porque $2^3 = 8$.

La base tiene que ser positiva y distinta de 1, y **solo existen logaritmos de números positivos**. El logaritmo de 1 es siempre 0 y el de la base es siempre 1.

Cuando no se escribe la base, es 10: **log 1000 = 3**. Es el logaritmo decimal, el que trae la calculadora.

Las tres propiedades: el logaritmo de un **producto** es la suma de logaritmos; el de un **cociente**, la resta; el de una **potencia**, el exponente por el logaritmo de la base.

Cambio de base: $\log_a N = \log N / \log a$. Con él se calcula cualquier logaritmo con la tecla log.

Trucos

Lee el logaritmo como una pregunta. $\log_3 81$ es «¿a qué número elevo 3 para que dé 81?». Formulado así, la mitad de los ejercicios se resuelven de cabeza.

No hay propiedad para la suma. $\log(a + b)$ no se puede separar. Solo el producto se convierte en suma; al revés no funciona.

Si la incógnita está en el exponente, toma logaritmos. En $2^x = 10$, se aplica log a los dos lados y el exponente «baja»: $x \cdot \log 2 = \log 10$.

Comprueba subiendo. Si has obtenido $\log_2 32 = 5$, calcula 2^5. Si da 32, está bien; si no, hay un error.

Para el adulto. Los logaritmos son una potencia leída al revés. Si el alumno se atasca, casi siempre es porque las potencias no están firmes: conviene repasar exponentes negativos y fraccionarios antes que insistir en las propiedades.

1. Calcula aplicando la definición.

a) $\log_2 32$ = ____ b) $\log_3 81$ = ____ c) $\log 1000$ = ____
d) $\log_2 (1/8)$ = ____ e) $\log_5 1$ = ____ f) $\log 0{,}01$ = ____

2. Halla x.

a) $\log_2 x = 4$ x = ____ b) $\log_x 49 = 2$ x = ____
c) $\log_3 x = -2$ x = ____ d) $\log x = -1$ x = ____

3. Aplica las propiedades y calcula sin calculadora.

a) $\log_2 (8 \cdot 16)$ = _____ b) $\log_3 (81/9)$ = _____
c) $\log_2 (4^5)$ = _____ d) $\log 2 + \log 5$ = _____ e) $\log 200 - \log 2$ = _____

4. **Sabiendo que log 2 ≈ 0,301 y log 3 ≈ 0,477, calcula sin calculadora.**

a) log 6 = _____ b) log 12 = _____

c) log 5 = _____ d) log 1,5 = _____

5. **Ecuaciones exponenciales.**

a) $2^x = 32$ x = ____ b) $3^{x+1} = 27$ x = ____

c) $2^x = 10$ (usa logaritmos y redondea a centésimas) x = ____

6. **Caza el error. Explica el fallo y corrige.**

a) «log (2 + 3) = log 2 + log 3» Error: _____ Bien: _____

b) «$\log_2(-8) = -3$» Error: _____ Bien: _____

7. **Problema. Ingresas 1000 € en una cuenta al 5 % de interés compuesto anual. ¿Cuántos años completos tienen que pasar para tener al menos 1500 €?**

Planteamiento: _____ Años: _____

8. **Problema. Un cultivo empieza con 500 bacterias y su número se duplica cada hora. ¿Cuántas horas tardará en llegar a 64 000?**

Planteamiento: _____ Horas: _____

9. **Problema. La acidez se mide con el pH = $-\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno.**

a) Si $[H^+] = 0{,}001$, ¿cuál es el pH? _____

b) Un zumo tiene pH 3 y el agua pura pH 7. ¿Cuántas veces es mayor la concentración $[H^+]$ del zumo? _____

El reto

Tu calculadora solo tiene la tecla **log**, en base 10. Calcula con ella **$\log_2 50$**.

1. **Usa el cambio de base y redondea a centésimas.**

2. **Comprueba el resultado elevando 2 a ese número.**

3. **Escribe log (−5) en la calculadora. ¿Qué pasa? Explica por qué con la definición.**

Si puedes explicar el paso 3, has entendido qué es un logaritmo: no existe ninguna potencia de base positiva que dé un número negativo.

Solucionario

Ejercicio 1: a) $2^5 = 32 \rightarrow$ **5** b) $3^4 = 81 \rightarrow$ **4** c) $10^3 = 1000 \rightarrow$ **3** d) $2^{-3} = 1/8 \rightarrow$ **−3** e) $5^0 = 1 \rightarrow$ **0** f) $10^{-2} = 0{,}01 \rightarrow$ **−2**.

Ejercicio 2: a) $x = 2^4 =$ **16** b) $x^2 = 49$ y la base tiene que ser positiva: **x = 7** c) $x = 3^{-2} =$ **1/9** d) $x = 10^{-1} =$ **0,1**.

Ejercicio 3: a) 3 + 4 = **7** b) 4 − 2 = **2** c) 5 · 2 = **10** d) log 10 = **1** e) log 100 = **2**.

Ejercicio 4: a) log 2 + log 3 ≈ **0,778** b) $12 = 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 \approx$ **1,079** c) $5 = 10/2 \rightarrow 1 - 0{,}301 \approx$ **0,699** d) $1{,}5 = 3/2 \rightarrow 0{,}477 - 0{,}301 \approx$ **0,176**.

Ejercicio 5: a) $32 = 2^5 \rightarrow$ **x = 5** b) $27 = 3^3 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow$ **x = 2** c) $x = \log 10 / \log 2 = 1/0{,}301 \approx$ **3,32**.

Ejercicio 6: a) no hay propiedad para la suma: log 5 ≈ 0,699, mientras que log 2 + log 3 = log 6 ≈ 0,778 b) **no existe**: ninguna potencia de 2 es negativa. Lo que vale −3 es **$\log_2 (1/8)$**.

Ejercicio 7: $1000 \cdot 1{,}05^t \geq 1500 \rightarrow t \geq \log 1{,}5 / \log 1{,}05 \approx 8{,}31$. A los 8 años hay 1477,46 €; a los 9, 1551,33 €: **9 años**.

Ejercicio 8: $500 \cdot 2^t = 64\,000 \rightarrow 2^t = 128 = 2^7 \rightarrow$ **7 horas**.

Ejercicio 9: a) $-\log 10^{-3} =$ **3** b) 10^{-3} frente a 10^{-7}: **10 000 veces** más. Cada punto de pH multiplica o divide por diez.

El reto: $\log_2 50 = \log 50 / \log 2 \approx 1{,}699 / 0{,}301 \approx$ **5,64**; y $2^{5{,}64} \approx 49{,}9$. La calculadora da error con log (−5) porque ninguna potencia de 10 es negativa.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Calcula logaritmos con la definición. C [ ] EP [ ] NC [ ]
2. Despeja la incógnita en un logaritmo. C [ ] EP [ ] NC [ ]
3. Aplica las propiedades de los logaritmos. C [ ] EP [ ] NC [ ]
4. Usa el cambio de base con la calculadora. C [ ] EP [ ] NC [ ]
5. Resuelve ecuaciones exponenciales. C [ ] EP [ ] NC [ ]
6. Plantea problemas de crecimiento con logaritmos. C [ ] EP [ ] NC [ ]

Cómo leer el conjunto

El 1d y el 1f miden si el alumno domina los exponentes negativos. Si fallan, el obstáculo está en las potencias, no en los logaritmos.

El 6a es el error más extendido de toda la unidad. Detectarlo por escrito vale más que diez ejercicios de propiedades hechos de memoria.

El 7 pide redondear hacia arriba porque se habla de años completos. Quien responde 8,31 ha resuelto la ecuación, pero no el problema: merece la pena comentarlo.