Matemáticas

4.º de ESO

Funciones cuadráticas y exponenciales

La parábola, el crecimiento exponencial y cómo se leen sus gráficas. Vale para Matemáticas A y B. Con solucionario razonado.

Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Una función **cuadrática** es **y = ax² + bx + c** y su gráfica es una **parábola**. Si **a > 0** se abre hacia arriba y tiene mínimo; si **a < 0**, hacia abajo y tiene máximo.

El **vértice** está en **x = −b / 2a**, y su altura se obtiene sustituyendo esa x en la función. Los **puntos de corte con el eje X** son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, y puede haber dos, uno o ninguno. El corte con el eje Y es siempre **c**.

Una función **exponencial** es **$y = k \cdot a^x$** con $a > 0$ y $a \neq 1$. Si **a > 1** crece; si **0 < a < 1**, decrece. No corta nunca el eje X: se acerca sin tocarlo, y esa recta se llama **asíntota horizontal**.

La diferencia esencial: en la cuadrática la x está **en la base**; en la exponencial, **en el exponente**. Por eso la exponencial acaba superando a cualquier cuadrática, aunque al principio parezca más lenta.

Trucos

El signo de a se lee en la gráfica antes que nada. Parábola hacia arriba, a positivo. Es lo primero que hay que mirar y descarta la mitad de las opciones en un test.

El vértice no se adivina: se calcula. −b/2a, y luego se sustituye. Un error de signo aquí desplaza toda la parábola, y el resto del ejercicio saldrá mal aunque esté bien hecho.

Para dibujar una parábola bastan cinco puntos: el vértice, los dos cortes con X si existen, el corte con Y y su simétrico respecto al vértice. Más puntos no la mejoran; menos, la deforman.

x^2 y 2^x no son lo mismo, y la diferencia es brutal. Con x = 10, x^2 da 100 y 2^x da 1 024. Con x = 20, dan 400 y más de un millón. Cualquier crecimiento exponencial acaba pasando por encima.

Una exponencial decreciente no llega nunca a cero. Se acerca indefinidamente. Es lo que ocurre con la dosis de un medicamento en sangre o con la carga de una batería vieja.

Para el adulto. Este tema es el que da sentido a la palabra «exponencial» que se usa mal en todas partes. Merece la pena detenerse en la comparación numérica del ejercicio 7: entenderla vale más que dibujar diez parábolas.

1. Para cada parábola, di hacia dónde se abre y calcula el vértice.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ → Abre: _____ Vértice: _____

b) $y = -x^2 + 2x + 8$ → Abre: _____ Vértice: _____

c) $y = 2x^2 - 8x$ → Abre: _____ Vértice: _____

2. Cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ → Con X: _____ Con Y: _____

b) $y = x^2 - 9$ → Con X: _____ Con Y: _____

c) $y = x^2 + 2x + 5$ → Con X: _____ Con Y: _____

3. Representa. Haz la tabla de cinco puntos y dibuja $y = x^2 - 2x - 3$.

x: ____ ____ ____ ____ ____

y: ____ ____ ____ ____ ____

4. Exponenciales. Completa la tabla.

$y = 2^x$ → $x = 0$: _____ $x = 1$: _____ $x = 3$: _____ $x = 5$: _____ $x = -1$: _____

$y = (1/2)^x$ → $x = 0$: _____ $x = 1$: _____ $x = 3$: _____ $x = -2$: _____

5. Crece o decrece. Escribe C o D.

a) $y = 3^x$ _____ b) $y = 0{,}5^x$ _____ c) $y = 1{,}05^x$ _____ d) $y = (2/3)^x$ _____

6. Problemas.

a) Se lanza una pelota y su altura en metros es $h = -5t^2 + 20t$. ¿En qué instante alcanza el punto más alto? _____ ¿Qué altura? _____ ¿Cuándo cae al suelo? _____

b) Un cultivo de 200 bacterias se duplica cada hora. ¿Cuántas hay a las 6 horas? _____

c) Un coche que costó 18 000 € pierde un 15 % de su valor cada año. ¿Cuánto vale a los 4 años? _____

7. Compara los dos crecimientos. Completa y responde.

$x = 1$ → x^2 = _____ 2^x = _____

$x = 4$ → x^2 = _____ 2^x = _____

$x = 10$ → x^2 = _____ 2^x = _____

¿A partir de qué valor de x gana 2^x y ya no se da la vuelta? _____

8. Caza el error. Explica el fallo y corrige.

a) «$y = x^2 - 6x + 5$ tiene el vértice en $x = 6$» Error: _____ Bien: _____

b) «$y = 2^x$ corta al eje X en $x = 0$» Error: _____ Bien: _____

c) «Si $a < 0$ la parábola tiene mínimo» Error: _____

El reto

Coge **un tablero de ajedrez** o dibuja una cuadrícula de 8 × 8, y un puñado de garbanzos o de monedas.

1. **Pon 1 en la primera casilla, 2 en la segunda, 4 en la tercera, y sigue mientras puedas.**

2. **Anota en qué casilla te quedas sin sitio físico.**

3. **Calcula cuántos harían falta en la casilla 64.**
   Son más de nueve trillones: dieciocho millones de veces la producción mundial de trigo. La leyenda es antigua, pero el punto es actual —duplicar algo pequeño treinta veces lo vuelve inmanejable— y es la razón de que la palabra «exponencial» asuste tanto.

Solucionario

Ejercicio 1: a) **arriba**, vértice (2, −1) b) **abajo**, vértice (1, 9) c) **arriba**, vértice (2, −8).

Ejercicio 2: a) con X **(1,0) y (3,0)**; con Y **(0,3)** b) con X **(−3,0) y (3,0)**; con Y **(0,−9)** c) **no corta el eje X** —el discriminante es negativo—; con Y **(0,5)**.

Ejercicio 3: vértice (1, −4); cortes (−1, 0) y (3, 0); corte con Y (0, −3) y su simétrico (2, −3).

Ejercicio 4: 2^x → **1, 2, 8, 32, 0,5** · $(1/2)^x$ → **1, 0,5, 0,125, 4**.

Ejercicio 5: a) **C** b) **D** c) **C** d) **D**.

Ejercicio 6: a) máximo en t = −20/(2·−5) = **2 s**, altura **20 m**; cae cuando h = 0, en **t = 4 s** b) $200 \cdot 2^6$ = **12 800 bacterias** c) $18\,000 \cdot 0{,}85^4$ = **9 396,06 €**.

Ejercicio 7: x = 1 → **1 y 2** · x = 4 → **16 y 16** · x = 10 → **100 y 1 024**. Empatan en x = 2 y en x = 4; a partir de **x = 5** gana 2^x definitivamente.

Ejercicio 8: a) el vértice está en **x = −b/2a = 3**, no en 6; se ha olvidado dividir entre 2a b) una exponencial **no corta nunca** el eje X; en x = 0 corta el **eje Y**, en el punto (0,1) c) con a < 0 la parábola abre hacia abajo y tiene **máximo**.

El reto: 2^{63} = **9 223 372 036 854 775 808** granos en la última casilla.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Determina orientación y vértice de una parábola. C [ ] EP [ ] NC [ ]
2. Halla los cortes con los ejes. C [ ] EP [ ] NC [ ]
3. Representa con los cinco puntos clave. C [ ] EP [ ] NC [ ]
4. Calcula valores de una exponencial. C [ ] EP [ ] NC [ ]
5. Distingue crecimiento de decrecimiento. C [ ] EP [ ] NC [ ]
6. Resuelve problemas de altura y de crecimiento. C [ ] EP [ ] NC [ ]

Cómo leer el conjunto

El 7 es el corazón de la ficha. Ver que en x = 4 empatan y que en x = 10 no hay color explica de una vez por qué «exponencial» no significa «rápido», sino «cada vez más rápido».

El 6a es el problema clásico y a la vez el más útil: el vértice de la parábola es el punto más alto de verdad, no una fórmula.

Si el 1 sale bien y el 2c falla, el hueco no está en funciones: está en el discriminante de las ecuaciones de segundo grado, que es de 3.º.