



Matemáticas

2.º de ESO

Semejanza y teorema de Tales

Usar la razón de semejanza para medir lo que no se puede medir, con la proporción bien planteada. Con solucionario razonado.



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y distinto tamaño. Eso significa dos cosas a la vez: sus **ángulos son iguales** y sus **lados son proporcionales**. Si falla una de las dos, no son semejantes. La **razón de semejanza** es el número por el que hay que multiplicar cada lado de una figura para obtener el de la otra. Se calcula dividiendo dos lados que se correspondan, y es la misma para todos los pares. El **teorema de Tales** dice que, si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, los segmentos que quedan en una son proporcionales a los de la otra. Es la herramienta para calcular un segmento desconocido dentro de un triángulo cortado por una paralela. Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios: que tengan **dos ángulos iguales**, que tengan los **tres lados proporcionales**, o que tengan **dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual**. Con uno de los tres basta. Cuidado con las áreas: si la razón de semejanza de los lados es «k», la de las **áreas es k al cuadrado** y la de los **volúmenes, k al cubo**. Duplicar los lados no duplica la superficie.

Trucos

Escribe la proporción con las figuras separadas y en el mismo orden. Poner arriba siempre los lados de la figura pequeña y abajo los de la grande evita el error más común del tema, que es cruzar un lado con el que no le corresponde. **Identifica los lados correspondientes por el ángulo, no por la posición del dibujo.** Una de las dos figuras suele venir girada a propósito. El lado que se opone al ángulo mayor de una se corresponde con el que se opone al ángulo mayor de la otra. **En los triángulos, busca primero los ángulos iguales.** El criterio de los dos ángulos es el que se usa en el noventa por ciento de los problemas y el más rápido de comprobar: dos paralelas cortadas por una secante ya regalan un par de ángulos iguales. **Comprueba el resultado con el sentido común antes de darlo por bueno.** Si el lado que buscas está en la figura grande, tiene que salir mayor que su correspondiente. Un resultado más pequeño delata que la proporción estaba del revés. **Para el adulto.** La semejanza es la base de la trigonometría de 4.º y de las escalas de mapas y planos. Es también uno de los pocos temas que se pueden comprobar saliendo a la calle: la sombra de un edificio y la de una persona a la misma hora forman dos triángulos semejantes, y con eso se mide la altura del edificio sin subir.

1. Calcula la razón de semejanza.

- a) Dos rectángulos de 6 cm por 9 cm y 10 cm por 15 cm. _____
- b) Dos triángulos de lados 3, 4 y 5 cm, y 12, 16 y 20 cm. _____
- c) Dos cuadrados de 7 cm y 4,2 cm de lado. _____



2. ¿Son semejantes? Escribe sí o no y justifica.

- a) Un rectángulo de 4 por 6 cm y otro de 6 por 9 cm. _____ Porque _____
- b) Un rectángulo de 3 por 5 cm y otro de 6 por 9 cm. _____ Porque _____
- c) Dos triángulos con ángulos de 40 y 60 grados cada uno. _____ Porque _____

3. Aplica el teorema de Tales y halla x.

- a) Tres paralelas cortan dos secantes. En la primera dejan segmentos de 4 cm y 6 cm; en la segunda, de 10 cm y x. $x =$ _____
- b) En un triángulo, una paralela a la base corta los lados dejando 3 cm y 5 cm en uno, y 4,5 cm y x en el otro. $x =$ _____
- c) Segmentos de 8 cm y x en una recta, y de 12 cm y 9 cm en la otra. $x =$ _____

4. Dos triángulos semejantes tienen razón 3. El pequeño mide 5, 7 y 9 cm.

- a) Lados del grande: _____
- b) Perímetro del pequeño: _____ del grande: _____
- c) ¿Por cuánto se multiplica el perímetro? _____

5. Escalas.

- a) En un plano a escala 1:200, un pasillo mide 7 cm. ¿Cuánto mide en realidad? _____
- b) Un campo de 90 m de largo se dibuja a escala 1:1.500. ¿Cuántos centímetros mide en el plano? _____
- c) Un mapa a escala 1:50.000 tiene dos pueblos a 12 cm. ¿A cuántos kilómetros están? _____

6. Áreas y volúmenes de figuras semejantes.

- a) Dos triángulos semejantes de razón 2. Si el pequeño tiene 15 cm^2 de área, el grande tiene _____
- b) Dos cubos semejantes de razón 3. Si el pequeño tiene 8 cm^3 , el grande tiene _____
- c) Dos círculos de radios 4 cm y 12 cm. Razón de áreas: _____

7. Problemas. Escribe la proporción y el resultado.

- a) Una persona de 1,70 m proyecta una sombra de 2,10 m. A la misma hora, un edificio proyecta 27 m de sombra. ¿Cuánto mide el edificio? _____
- b) Una foto de 10 por 15 cm se amplía hasta que el lado menor mide 24 cm. ¿Cuánto mide el lado mayor y cuántas veces mayor es la superficie? _____

8. Caza el error. Explica el fallo en una línea.

«Si amplió una figura al doble, su área también se duplica, porque todo se ha multiplicado por dos.»

9. Piensa un poco más.

Todos los cuadrados son semejantes entre sí, pero no todos los rectángulos lo son. ¿Por qué?

El reto

Sal a la calle **un día de sol** con una cinta métrica y compañía de un adulto.



1. Mide tu altura y la longitud de tu sombra en ese momento.

2. Mide la sombra de una farola, un árbol o una fachada.

3. Plantea la proporción y calcula su altura.

Es el mismo procedimiento con el que se midió la altura de las pirámides hace veintiséis siglos, y funciona porque los rayos del sol llegan paralelos: tu triángulo y el de la farola tienen los mismos ángulos. Repítelo dos horas después y comprueba que las sombras cambian pero el resultado sale igual.



Solucionario

Ejercicio 1: a) $10 : 6 = \mathbf{5/3}$, y $15 : 9$ también b) $12 : 3 = \mathbf{4}$ c) $4,2 : 7 = \mathbf{0,6}$, o bien $7 : 4,2 = 5/3$ según qué figura se tome como referencia. Ejercicio 2: a) **sí**, porque $6:4 = 1,5$ y $9:6 = 1,5$: las dos razones coinciden b) **no**, porque $6:3 = 2$ pero $9:5 = 1,8$ c) **sí**, porque si coinciden dos ángulos coincide también el tercero, ya que los tres suman 180 grados. Ejercicio 3: a) $4/6 = 10/x$, luego $x = 60 : 4 = \mathbf{15\text{ cm}}$ b) $3/5 = 4,5/x$, luego $x = 22,5 : 3 = \mathbf{7,5\text{ cm}}$ c) $8/x = 12/9$, luego $x = 72 : 12 = \mathbf{6\text{ cm}}$. Ejercicio 4: a) **15, 21 y 27 cm** b) pequeño **21 cm**, grande **63 cm** c) por **3**, la misma razón que los lados, porque el perímetro es una suma de longitudes. Ejercicio 5: a) $7 \cdot 200 = 1.400\text{ cm} = \mathbf{14\text{ m}}$ b) $9.000\text{ cm} : 1.500 = \mathbf{6\text{ cm}}$ c) $12 \cdot 50.000 = 600.000\text{ cm} = \mathbf{6\text{ km}}$. Ejercicio 6: a) $15 \cdot 4 = \mathbf{60\text{ cm}^2}$ b) $8 \cdot 27 = \mathbf{216\text{ cm}^3}$ c) la razón de los radios es 3, así que la de las áreas es **9**. Ejercicio 7: a) $1,70 / 2,10 = x / 27$, luego $x = 45,9 : 2,10 = \mathbf{21,86\text{ m}}$ aproximadamente b) la razón es $24 : 10 = 2,4$, así que el lado mayor mide $15 \cdot 2,4 = \mathbf{36\text{ cm}}$; la superficie es **5,76 veces** mayor, porque 2,4 al cuadrado es 5,76. Ejercicio 8: el área **se multiplica por cuatro**, no por dos. Al ampliar al doble se duplican las dos dimensiones, y la superficie depende de las dos: la razón de áreas es el cuadrado de la razón de longitudes. Ejercicio 9: respuesta abierta. La idea: en un cuadrado la proporción entre los lados es siempre uno a uno, así que todos tienen la misma forma. En un rectángulo esa proporción puede ser cualquiera, y dos rectángulos solo son semejantes si coincide. El reto: respuesta abierta.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Calcula la razón de semejanza entre dos figuras. C [] EP [] NC []
2. Comprueba si dos figuras son semejantes. C [] EP [] NC []
3. Aplica el teorema de Tales para hallar un segmento. C [] EP [] NC []
4. Resuelve problemas de escala. C [] EP [] NC []
5. Relaciona razón de longitudes, de áreas y de volúmenes. C [] EP [] NC []
6. Plantea la proporción en un problema real. C [] EP [] NC []

Cómo leer el conjunto

El 5 es el que más se falla y el que más aparece en pruebas externas. Quien no distingue la razón de longitudes de la de áreas contesta mal aunque haya calculado bien todo lo anterior.

El 6 evalúa algo distinto del cálculo: saber cuál es el lado que se corresponde con cuál. Si el planteamiento está bien y la cuenta mal, la competencia geométrica está adquirida.

Si el 3 falla, mira si el alumno cruza los términos al escribir la proporción. Dibujar los dos triángulos por separado, uno al lado del otro, lo corrige casi siempre.