



Matemáticas

4.º de ESO

Progresiones aritméticas y geométricas

Término general, suma de términos y los problemas de interés compuesto.
Vale para Matemáticas A y B. Con solucionario razonado.



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Una **progresión aritmética** avanza **sumando** siempre la misma cantidad, la **diferencia d**. Su término general es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ y la suma de los n primeros, $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$. Una **progresión geométrica** avanza **multiplicando** siempre por lo mismo, la **razón r**. Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$ y la suma, $S_n = (a_n \cdot r - a_1) / (r - 1)$. Cuando $|r| < 1$, la geométrica tiene **suma infinita**: $S = a_1 / (1 - r)$. Sumar infinitos números y obtener uno finito no es un truco: los términos se hacen tan pequeños que dejan de aportar. El **interés compuesto** es una progresión geométrica disfrazada: el capital final tras n años es $C \cdot (1 + i)^n$, donde i es el tanto por uno.

Trucos

Antes de aplicar fórmulas, resta o divide dos términos consecutivos. Si la resta es siempre la misma, es aritmética; si el cociente es siempre el mismo, es geométrica. Y si no se cumple ninguna de las dos cosas, **no es una progresión** y las fórmulas no valen. **El $(n - 1)$ es lo que más se olvida.** Para el término 10 de una aritmética se suman **nueve** diferencias, no diez, porque el primero ya está puesto. Se comprueba con un caso pequeño: en 2, 5, 8, el tercero es $2 + 2 \cdot 3 = 8$, y sale. **No confundir crecer un 20 % con multiplicar por 0,20.** Se multiplica por **1,20**. Bajar un 20 % es multiplicar por **0,80**. El error de poner 0,20 convierte una subida en un desplome y aparece en casi todos los exámenes. **Y una que no es intuitiva:** subir un 10 % y luego bajar un 10 % **no deja el precio igual**. $1,10 \cdot 0,90 = 0,99$, o sea un 1 % menos. Con porcentajes, el orden no salva la diferencia. **Para el adulto.** Este tema es la puerta de entrada a las matemáticas financieras que se usan de verdad —préstamos, hipotecas, ahorro—. Conviene insistir en el $1 + i$, porque es lo que convierte un ejercicio escolar en algo que servirá dentro de diez años.

1. Aritmética, geométrica o ninguna. Escribe el tipo y d o r.

- e) 12, 9, 6, 3, ... Tipo: _____ d o r: _____
- a) 3, 7, 11, 15, ... Tipo: _____ d o r: _____
- b) 2, 6, 18, 54, ... Tipo: _____ d o r: _____
- c) 1, 4, 9, 16, ... Tipo: _____ d o r: _____
- d) 40, 20, 10, 5, ... Tipo: _____ d o r: _____

2. Aritméticas. Calcula lo que se pide.

- a) $a_1 = 5$, $d = 3 \rightarrow a_{12} =$ _____
- b) $a_1 = -4$, $d = 6 \rightarrow a_{20} =$ _____
- c) $a_1 = 7$, $a_{10} = 43 \rightarrow d =$ _____
- d) $a_1 = 2$, $d = 5 \rightarrow S_{10} =$ _____

3. Geométricas. Calcula lo que se pide.

- a) $a_1 = 3, r = 2 \rightarrow a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$
 b) $a_1 = 64, r = 1/2 \rightarrow a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
 c) $a_1 = 5, r = 3 \rightarrow S_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
 d) $a_1 = 9, r = 1/3 \rightarrow \text{suma infinita} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Escribe los cuatro primeros términos.

- a) $a_n = 4n - 1 \rightarrow$ _____, _____, _____, _____
b) $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \rightarrow$ _____, _____, _____, _____

5. Problemas de la vida real.

- a) Una piscina pierde 15 litros cada hora y empieza con 900. ¿Cuántos le quedan a las 12 horas? _____
- b) Un vídeo tiene 200 visitas el primer día y cada día multiplica por 3 las del anterior. ¿Cuántas el quinto día? _____
- c) Alguien ahorra 30 € el primer mes y 8 € más cada mes. ¿Cuánto lleva ahorrado en un año? _____

6. Interés compuesto. Usa $C \cdot (1 + i)^n$.

- a) 2 000 € al 3 % anual durante 5 años → _____
b) 500 € al 2 % anual durante 10 años → _____
c) ¿Cuánto se gana de intereses en el caso a?

7. Caza el error. Explica el fallo y corrige.

- a) « $a_1 = 4, d = 3 \rightarrow a_{10} = 4 + 10 \cdot 3 = 34$ » Error: _____ Bien: _____
 b) «Subir un 25 % es multiplicar por 0,25» Error: _____ Bien: _____
 c) «1, 2, 4, 7, 11 es geométrica» Error: _____

8. Piensa un poco más.

- a) Un precio sube un 10 % y después baja un 10 %. ¿Queda igual? _____ ¿Cuánto vale ahora si costaba 100 €? _____
- b) ¿Por qué $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ no crece sin parar?

El reto

Coge **una hoja de papel** y dóblala por la mitad tantas veces como puedas.

1. Anota cuántas capas hay tras cada doblez: 2, 4, 8...

2. Escribe el término general de esa progresión.

3. Calcula, sin doblar, cuántas capas habría tras 25 dobleces.

Salen más de treinta y tres millones. Doblar no es sumar: es multiplicar, y por eso lo geométrico desborda cualquier intuición a partir del décimo paso.



Solucionario

Ejercicio 1: a) **aritmética**, $d = 4$ b) **geométrica**, $r = 3$ c) **ninguna**: las diferencias son 3, 5, 7 y los cocientes no se repiten d) **geométrica**, $r = 1/2$ e) **aritmética**, $d = -3$. Ejercicio 2: a) $5 + 11 \cdot 3 = \mathbf{38}$ b) $-4 + 19 \cdot 6 = \mathbf{110}$ c) $43 = 7 + 9d \rightarrow d = \mathbf{4}$ d) $a_{10} = 47$, $S = (2 + 47) \cdot 10/2 = \mathbf{245}$. Ejercicio 3: a) $3 \cdot 2^7 = \mathbf{384}$ b) $64 \cdot (1/2)^4 = \mathbf{4}$ c) $a_6 = 1\,215$; $S = (1\,215 \cdot 3 - 5)/2 = \mathbf{1\,820}$ d) $9/(1 - 1/3) = \mathbf{13,5}$. Ejercicio 4: a) **3, 7, 11, 15** b) **3, 6, 12, 24**. Ejercicio 5: a) $a_{13} = 900 - 12 \cdot 15 = \mathbf{720 \text{ litros}}$ b) $200 \cdot 3^4 = \mathbf{16\,200 \text{ visitas}}$ c) $a_{12} = 30 + 11 \cdot 8 = 118$; $S = (30 + 118) \cdot 12/2 = \mathbf{888 \text{ €}}$. Ejercicio 6: a) $2\,000 \cdot 1,03^5 = \mathbf{2\,318,55 \text{ €}}$ b) $500 \cdot 1,02^{10} = \mathbf{609,50 \text{ €}}$ c) **318,55 €**. Ejercicio 7: a) sobra una diferencia: son **nueve**, no diez $\rightarrow a_{10} = 4 + 9 \cdot 3 = \mathbf{31}$ b) subir un 25 % es multiplicar por **1,25**; por 0,25 se quedaría en la cuarta parte c) las diferencias son 1, 2, 3, 4: crece, pero no multiplicando. **No es geométrica** ni aritmética. Ejercicio 8: a) **no**: $100 \cdot 1,1 \cdot 0,9 = \mathbf{99 \text{ €}}$ b) porque es geométrica con $r = 1/2 < 1$; su suma infinita vale $1/2 : (1 - 1/2) = \mathbf{1}$. Los términos se hacen tan pequeños que el total se acerca a 1 sin pasarlo. El reto: $\text{capas} = 2^n$; con 25 dobles, **33 554 432**.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Distingue aritmética, geométrica y ninguna. C [] EP [] NC []
2. Aplica el término general con el $(n - 1)$ correcto. C [] EP [] NC []
3. Calcula sumas de n términos. C [] EP [] NC []
4. Usa la suma infinita cuando procede. C [] EP [] NC []
5. Resuelve interés compuesto con $1 + i$. C [] EP [] NC []
6. Interpreta el resultado, no solo lo calcula. C [] EP [] NC []

Cómo leer el conjunto

El 1c es el ejercicio más importante y el que más se salta: reconocer que **algo no es una progresión** evita aplicar una fórmula a un caso donde no vale, que es de donde salen los disparates.

El 7a concentra el error del $(n - 1)$. Si aparece aquí, aparecerá en todos los problemas del 5.

El 8a es de los que se recuerdan años después. Conviene hacerlo con calculadora y en voz alta: casi todo el mundo apuesta que queda igual.