



Matemáticas

4.º de ESO

Polinomios: Ruffini y factorización

Valor numérico, operaciones, regla de Ruffini, teorema del resto y factorización paso a paso. Vale para Matemáticas A y B. Con solucionario razonado.



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ en $x = a$ es el número que sale al sustituir x por a . Se escribe $P(a)$. La **regla de Ruffini** divide un polinomio entre $(x - a)$ usando solo los coeficientes. Hay que ordenarlos de mayor a menor grado y **escribir un 0 donde falte un término**.

Teorema del resto: el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es $P(a)$. Si $P(a) = 0$, a es una **raíz** y $(x - a)$ es un **factor** del polinomio. Las **raíces enteras** de un polinomio de coeficientes enteros están entre los **divisores del término independiente**. Son los únicos candidatos que hay que probar. **Factorizar** es escribir el polinomio como producto de factores lo más sencillos posible. Primero se saca **factor común**, después se buscan **identidades notables** y, si no basta, se aplica **Ruffini**.

Trucos

Las identidades notables ahorran medio examen. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Reconocerlas al revés es factorizar sin Ruffini. **En Ruffini, $(x + 2)$ se divide con -2 .** El número que se pone a la izquierda es la raíz, con el signo cambiado respecto al paréntesis. **Cuando el cociente es de grado 2, pasa a la fórmula.** No hace falta seguir probando divisores: la ecuación de segundo grado da las dos raíces que faltan, o dice que no hay más. **Comprueba multiplicando.** Una factorización se revisa desarrollando los factores. Si vuelve el polinomio original, está bien. **Para el adulto.** La factorización es la base de las fracciones algebraicas, las inecuaciones y las funciones de 1.º de Bachillerato. Si el 5 no sale con soltura, merece la pena repetirlo antes de avanzar: es la herramienta que más se usa después.

1. Valor numérico. Si $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, calcula:

a) $P(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $P(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ c) $P(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Opera y simplifica.

a) $(x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - x + 4) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $(x + 2)(x^2 - x + 3) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $(x - 3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $(2x + 1)(2x - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Divide por Ruffini. Escribe el cociente y el resto.

a) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$ Cociente: $\underline{\hspace{2cm}}$ Resto: $\underline{\hspace{2cm}}$

b) $(2x^3 + 3x^2 - 5) : (x + 1)$ Cociente: $\underline{\hspace{2cm}}$ Resto: $\underline{\hspace{2cm}}$

4. Teorema del resto. Sin dividir:

a) Resto de $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Resto de $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x + 2) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) ¿Para qué valor de k es $x^3 + kx - 6$ divisible entre $(x - 2)$? $k = \underline{\hspace{2cm}}$



5. Factoriza.

- a) $x^2 - 9 =$ _____ b) $x^2 - 6x + 9 =$ _____
c) $x^3 - 4x =$ _____ d) $x^3 - 4x^2 + x + 6 =$ _____
e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$ _____

6. Caza el error. Explica el fallo y corrige.

- a) « $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ » Error: _____ Bien: _____
b) «Las raíces de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ son 2, 3 y 1.» Error: _____ Bien: _____

7. Simplifica la fracción algebraica factorizando numerador y denominador.

$$(x^2 - 9) / (x^2 + 6x + 9) = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. Problema. De una lámina de cartón cuadrada de 20 cm de lado se recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y se doblan los bordes para hacer una caja sin tapa.

- a) Escribe el volumen $V(x)$ como polinomio desarrollado. $V(x) =$ _____
b) Calcula $V(2)$, $V(3)$, $V(4)$ y $V(5)$. ¿Con qué x entera cabe más? _____

9. Problema. Busca tres números enteros consecutivos cuyo producto sea 120. Llama x al menor, escribe la ecuación como polinomio igualado a cero y resuélvela con Ruffini.

Planteamiento: _____ Números: _____

El reto

Construye un polinomio de **grado 3**, con coeficiente principal 1, cuyas raíces sean **1, -2 y 3**.

1. Escríbelo como producto de factores.

2. Desarróllalo.

3. Compáralo con el ejercicio 5e. ¿Qué observas?

4. Multiplica las tres raíces y compara con el término independiente. ¿Por qué crees que las raíces enteras se buscan entre sus divisores?

Factorizar y desarrollar son el mismo camino recorrido en dos sentidos. Quien ve eso deja de probar divisores al azar.



Solucionario

Ejercicio 1: a) $8 - 8 + 6 - 4 = 2$ b) $-1 - 2 - 3 - 4 = -10$ c) -4 , el término independiente. Ejercicio 2: a) $3x^2 + 2x + 3$ b) $x^3 - x^2 + 3x + 2x^2 - 2x + 6 = x^3 + x^2 + x + 6$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) suma por diferencia: $4x^2 - 1$. Ejercicio 3: a) coeficientes 1, -4 , 1, 6 con 2: cociente $x^2 - 2x - 3$, resto 0 b) coeficientes 2, 3, 0, -5 con -1 : cociente $2x^2 + x - 1$, resto -4 . Comprobación: $P(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$. Ejercicio 4: a) $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$: es divisible b) $P(-2) = 16 - 12 + 2 = 6$ c) $8 + 2k - 6 = 0 \rightarrow k = -1$. Ejercicio 5: a) diferencia de cuadrados: $(x - 3)(x + 3)$ b) cuadrado de una diferencia: $(x - 3)^2$ c) factor común y diferencia de cuadrados: $x(x - 2)(x + 2)$ d) con el 3a y la fórmula para $x^2 - 2x - 3$: $(x - 2)(x - 3)(x + 1)$ e) $P(1) = 0$; Ruffini con 1 da $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$: $(x - 1)(x - 3)(x + 2)$. Ejercicio 6: a) falta el doble producto: $x^2 + 6x + 9$ b) el factor $(x + 1)$ corresponde a la raíz -1 , no a 1. Comprobación: $P(1) = 4$ y $P(-1) = 0$. Las raíces son 2, 3 y -1 . Ejercicio 7: $(x - 3)(x + 3) / (x + 3)^2 = (x - 3)/(x + 3)$, para $x \neq -3$. Ejercicio 8: a) $V(x) = x(20 - 2x)^2 = 4x^3 - 80x^2 + 400x$ b) $V(2) = 512$, $V(3) = 588$, $V(4) = 576$, $V(5) = 500$: con $x = 3$ cm cabe más, 588 cm^3 . Ejercicio 9: $x(x + 1)(x + 2) = 120 \rightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 120 = 0$. Con Ruffini, $x = 4$ da resto 0 y queda $x^2 + 7x + 30$, que no tiene raíces reales. Los números son 4, 5 y 6. El reto: $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, el mismo polinomio del 5e. El producto de las raíces es -6 y el término independiente 6: al desarrollar, el término independiente sale de multiplicar las raíces (con el signo cambiado en grado 3), y por eso cada raíz entera divide al término independiente.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Calcula el valor numérico de un polinomio. C [] EP [] NC []
2. Opera polinomios e identidades notables. C [] EP [] NC []
3. Divide con Ruffini, con ceros donde falten términos. C [] EP [] NC []
4. Aplica el teorema del resto. C [] EP [] NC []
5. Factoriza un polinomio de grado 3. C [] EP [] NC []
6. Plantea un problema con polinomios. C [] EP [] NC []

Cómo leer el conjunto

El 3b tiene un término que falta a propósito. Si el cociente sale mal, casi siempre es porque no se ha escrito el 0: es el fallo número uno de Ruffini.

El 6b es la confusión entre factor y raíz: $(x + 1)$ se anula en -1 . Quien lo detecta tiene el concepto; quien no, está aplicando Ruffini sin saber qué busca.

El 8 conecta los polinomios con una situación real y anticipa la optimización de Bachillerato. No hace falta más que sustituir, pero obliga a leer qué significa x en la caja.