



Matemáticas

3.º de ESO

Números racionales y potencias

Fracción generatriz, operaciones combinadas con fracciones y potencias de exponente negativo. Con solucionario razonado.



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Un **número racional** es el que se puede escribir como fracción. Todos los decimales exactos y todos los periódicos lo son; los que tienen infinitas cifras sin periodo, como π o $\sqrt{2}$, no. Una fracción irreducible da un **decimal exacto** si su denominador solo tiene los factores 2 y 5; si tiene cualquier otro, da un **decimal periódico**. La **fracción generatriz** es la fracción de la que sale un decimal. Para un periódico: en el numerador, el número completo sin coma menos la parte que no se repite; en el denominador, tantos **9** como cifras tiene el periodo y tantos **0** como cifras hay entre la coma y el periodo. Una **potencia de exponente negativo** es el inverso de la potencia positiva: $a^{-n} = 1/a^n$. Con fracciones, se da la vuelta: $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$. Las propiedades de siempre valen igual: al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes; al dividir, se restan; una potencia de potencia los multiplica.

Trucos

El orden de las operaciones manda. Paréntesis, después potencias, después multiplicaciones y divisiones, y al final sumas y restas. En « $1 - 2/3 \cdot 3/8$ » se multiplica antes de restar. **Un exponente negativo no hace negativo el resultado.** Hace pequeño el número, que es otra cosa: 2^{-3} es $1/8$, no -8 . El signo del resultado lo decide la base. **Pasa los periódicos a fracción antes de operar.** Sumar $0,333... + 0,5$ con decimales obliga a redondear; con fracciones sale exacto: $1/3 + 1/2 = 5/6$. **Simplifica antes de multiplicar.** Cruzar numeradores con denominadores ahorra números grandes y errores. **Para el adulto.** Este tema no es nuevo: son las fracciones de siempre con dos piezas añadidas, la generatriz y los exponentes negativos. Si falla el 3, el problema viene de 1.º y 2.º, y conviene repasar fracciones antes de seguir con álgebra.

1. Sin hacer la división, ¿qué decimal da cada fracción? Justifica mirando el denominador.

- a) $3/8 \rightarrow$ exacto ☐ periódico ☐ b) $2/3 \rightarrow$ exacto ☐ periódico ☐
c) $7/6 \rightarrow$ exacto ☐ periódico ☐ d) $5/20 \rightarrow$ exacto ☐ periódico ☐

2. Calcula la fracción generatriz y simplifícala.

- a) $0,75 = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $0,333... = \underline{\hspace{2cm}}$ c) $1,666... = \underline{\hspace{2cm}}$
d) $0,1666... = \underline{\hspace{2cm}}$ e) $2,454545... = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Opera y simplifica.

- a) $2/3 + 1/4 - 1/6 = \underline{\hspace{2cm}}$
b) $(1/2 - 1/3) \cdot 6/5 = \underline{\hspace{2cm}}$
c) $3/4 : (1/2 + 1/4) = \underline{\hspace{2cm}}$
d) $1 - 2/3 \cdot 3/8 = \underline{\hspace{2cm}}$



4. Potencias de exponente negativo. Calcula.

- a) $2^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $(2/3)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$
c) $10^{-4} = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $(-1/2)^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. Aplica las propiedades y da el resultado como potencia y como número.

- a) $3^4 \cdot 3^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $5^{-2} : 5^{-5} = \underline{\hspace{2cm}}$
c) $(2^{-1})^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $(2/5)^3 \cdot (5/2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

6. Con periódicos. Pasa a fracción y opera: $0,333... + 0,5 = \underline{\hspace{2cm}}$

7. Caza el error. Explica el fallo y corrige.

- a) «0,999... es casi 1, pero no llega a ser 1.» Error: Bien:
b) « $2^{-3} = -8$ » Error: Bien:
c) « $2/3 + 1/4 = 3/7$ » Error: Bien:

8. Problema. De un depósito se gasta $1/3$ el lunes y, el martes, $2/5$ de lo que quedaba. Aún quedan 120 litros. ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Planteamiento: Capacidad:

9. Problema. Los 0,666... de un número valen 40. ¿Cuál es el número?

Planteamiento: Número:

El reto

Demuestra de **dos maneras distintas** que 0,999... es exactamente 1.

1. Con la fracción generatriz.

2. Sin ella: calcula $1/3$ en decimal, multiplícalo por 3 y compara con $3/3$.

Después busca en tu casa o en internet quién defiende lo contrario y con qué argumento. La respuesta está en la palabra «infinitos»: no son muchos nueves, son todos.



Solucionario

Ejercicio 1: a) **exacto**: $8 = 2^3 \rightarrow 0,375$ b) **periódico**: el denominador es 3 $\rightarrow 0,666...$ c) **periódico**: $6 = 2 \cdot 3$, y el 3 lo hace periódico $\rightarrow 1,1666...$ d) **exacto**: $5/20 = 1/4$, y $4 = 2^2 \rightarrow 0,25$. Hay que simplificar antes de mirar el denominador. Ejercicio 2: a) $75/100 = 3/4$ b) $3/9 = 1/3$ c) $(16 - 1)/9 = 15/9 = 5/3$ d) $(16 - 1)/90 = 15/90 = 1/6$ e) $(245 - 2)/99 = 243/99 = 27/11$. Ejercicio 3: a) $8/12 + 3/12 - 2/12 = 9/12 = 3/4$ b) $1/6 \cdot 6/5 = 1/5$ c) $3/4 : 3/4 = 1$ d) primero el producto: $2/3 \cdot 3/8 = 1/4$; después $1 - 1/4 = 3/4$. Ejercicio 4: a) $1/8$ b) $(3/2)^2 = 9/4$ c) **0,0001** d) $(-2)^3 = -8$. Aquí el resultado sí es negativo, porque lo es la base y el exponente es impar. Ejercicio 5: a) $3^2 = 9$ b) $5^{-2+5} = 5^3 = 125$ c) $2^{-3} = 1/8$ d) $(2/5)^3 \cdot (2/5)^{-2} = (2/5)^1 = 2/5$. Ejercicio 6: $1/3 + 1/2 = 5/6$. Ejercicio 7: a) es **exactamente 1**: su generatriz es $9/9$ b) el exponente negativo invierte, no cambia el signo: $2^{-3} = 1/8$ c) no se suman denominadores; con denominador común 12: $8/12 + 3/12 = 11/12$. Ejercicio 8: tras el lunes queda $2/3$. El martes se gasta $2/5$ de $2/3 = 4/15$. Queda $2/3 - 4/15 = 6/15 = 2/5$ del depósito. Si $2/5$ son 120 L, la capacidad es **300 litros**. Ejercicio 9: $0,666... = 2/3$. Si $2/3$ de $x = 40$, entonces **$x = 60$** . El reto: 1) generatriz de $0,999...$: $9/9 = 1$ 2) $1/3 = 0,333...$; por 3 da $0,999...$, y $3 \cdot 1/3 = 1$. Los dos caminos llevan al mismo número.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Predice el tipo de decimal por el denominador. C [] EP [] NC []
2. Calcula fracciones generatrices. C [] EP [] NC []
3. Resuelve operaciones combinadas con fracciones. C [] EP [] NC []
4. Calcula potencias de exponente negativo. C [] EP [] NC []
5. Aplica las propiedades de las potencias. C [] EP [] NC []
6. Resuelve problemas de fracción de lo que queda. C [] EP [] NC []

Cómo leer el conjunto

El 1d es la trampa buena: $5/20$ parece periódico si no se simplifica. Enseña que la regla vale para la fracción irreducible, no para cualquiera.

El 3d y el 4d son los dos ejercicios de signos y prioridad que más fallan. Si salen bien, el resto del tema está en su sitio.

El 8 es el problema clásico de «fracción de lo que queda». Quien calcula $2/5$ del total en lugar de $2/5$ de lo que queda llega a un depósito de 450 litros, que es la respuesta equivocada más habitual.