



Matemáticas

4.º de ESO

Funciones cuadráticas y exponenciales

La parábola, el crecimiento exponencial y cómo se leen sus gráficas. Vale para Matemáticas A y B. Con solucionario razonado.



Nombre y apellidos: _____ Fecha: _____

Recuerda

Una función **cuadrática** es $y = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una **parábola**. Si $a > 0$ se abre hacia arriba y tiene mínimo; si $a < 0$, hacia abajo y tiene máximo. El **vértice** está en $x = -b / 2a$, y su altura se obtiene sustituyendo esa x en la función. Los **puntos de corte con el eje X** son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, y puede haber dos, uno o ninguno. El corte con el eje Y es siempre **c**. Una función **exponencial** es $y = k \cdot a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$. Si $a > 1$ crece; si $0 < a < 1$, decrece. No corta nunca el eje X: se acerca sin tocarlo, y esa recta se llama **asíntota horizontal**. La diferencia esencial: en la cuadrática la x está **en la base**; en la exponencial, **en el exponente**. Por eso la exponencial acaba superando a cualquier cuadrática, aunque al principio parezca más lenta.

Trucos

El signo de a se lee en la gráfica antes que nada. Parábola hacia arriba, a positivo. Es lo primero que hay que mirar y descarta la mitad de las opciones en un test. **El vértice no se adivina: se calcula.** $-b/2a$, y luego se sustituye. Un error de signo aquí desplaza toda la parábola, y el resto del ejercicio saldrá mal aunque esté bien hecho. **Para dibujar una parábola bastan cinco puntos:** el vértice, los dos cortes con X si existen, el corte con Y y su simétrico respecto al vértice. Más puntos no la mejoran; menos, la deforman. **x^2 y 2^x no son lo mismo, y la diferencia es brutal.** Con $x = 10$, x^2 da 100 y 2^x da 1 024. Con $x = 20$, dan 400 y más de un millón. Cualquier crecimiento exponencial acaba pasando por encima. **Una exponencial decreciente no llega nunca a cero.** Se acerca indefinidamente. Es lo que ocurre con la dosis de un medicamento en sangre o con la carga de una batería vieja. **Para el adulto.** Este tema es el que da sentido a la palabra «exponencial» que se usa mal en todas partes. Merece la pena detenerse en la comparación numérica del ejercicio 7: entenderla vale más que dibujar diez parábolas.

1. Para cada parábola, di hacia dónde se abre y calcula el vértice.

- a) $y = x^2 - 4x + 3 \rightarrow$ Abre: _____ Vértice: _____
- b) $y = -x^2 + 2x + 8 \rightarrow$ Abre: _____ Vértice: _____
- c) $y = 2x^2 - 8x \rightarrow$ Abre: _____ Vértice: _____

2. Cortes con los ejes.

- a) $y = x^2 - 4x + 3 \rightarrow$ Con X: _____ Con Y: _____
- b) $y = x^2 - 9 \rightarrow$ Con X: _____ Con Y: _____
- c) $y = x^2 + 2x + 5 \rightarrow$ Con X: _____ Con Y: _____



3. Representa. Haz la tabla de cinco puntos y dibuja $y = x^2 - 2x - 3$.

x: _____

y: _____

4. Exponenciales. Completa la tabla.

$y = 2^x \rightarrow x = 0$: _____ $x = 1$: _____ $x = 3$: _____ $x = 5$: _____ $x = -1$: _____

$y = (1/2)^x \rightarrow x = 0$: _____ $x = 1$: _____ $x = 3$: _____ $x = -2$: _____

5. Crece o decrece. Escribe C o D.

a) $y = 3^x$ _____ b) $y = 0,5^x$ _____ c) $y = 1,05^x$ _____ d) $y = (2/3)^x$ _____

6. Problemas.

a) Se lanza una pelota y su altura en metros es $h = -5t^2 + 20t$. ¿En qué instante alcanza el punto más alto? _____ ¿Qué altura? _____ ¿Cuándo cae al suelo? _____

b) Un cultivo de 200 bacterias se duplica cada hora. ¿Cuántas hay a las 6 horas? _____

c) Un coche que costó 18 000 € pierde un 15 % de su valor cada año. ¿Cuánto vale a los 4 años? _____

7. Compara los dos crecimientos. Completa y responde.

$x = 1 \rightarrow x^2 =$ _____ $2^x =$ _____

$x = 4 \rightarrow x^2 =$ _____ $2^x =$ _____

$x = 10 \rightarrow x^2 =$ _____ $2^x =$ _____

¿A partir de qué valor de x gana 2^x y ya no se da la vuelta? _____

8. Caza el error. Explica el fallo y corrige.

a) « $y = x^2 - 6x + 5$ tiene el vértice en $x = 6$ » Error: _____ Bien: _____

b) « $y = 2^x$ corta al eje X en $x = 0$ » Error: _____ Bien: _____

c) «Si $a < 0$ la parábola tiene mínimo» Error: _____

El reto

Coge **un tablero de ajedrez** o dibuja una cuadrícula de 8×8 , y un puñado de garbanzos o de monedas.

1. Pon 1 en la primera casilla, 2 en la segunda, 4 en la tercera, y sigue mientras puedas.



2. Anota en qué casilla te quedas sin sitio físico.

3. Calcula cuántos harían falta en la casilla 64.

Son más de nueve trillones: dieciocho millones de veces la producción mundial de trigo. La leyenda es antigua, pero el punto es actual —duplicar algo pequeño treinta veces lo vuelve inmanejable— y es la razón de que la palabra «exponencial» asuste tanto.



Solucionario

Ejercicio 1: a) **arriba**, vértice $(2, -1)$ b) **abajo**, vértice $(1, 9)$ c) **arriba**, vértice $(2, -8)$. Ejercicio 2: a) con X **(1,0) y (3,0)**; con Y **(0,3)** b) con X **(-3,0) y (3,0)**; con Y **(0,-9)** c) **no corta el eje X** —el discriminante es negativo—; con Y **(0,5)**. Ejercicio 3: vértice $(1, -4)$; cortes $(-1, 0)$ y $(3, 0)$; corte con Y $(0, -3)$ y su simétrico $(2, -3)$. Ejercicio 4: $2^x \rightarrow$ **1, 2, 8, 32, 0,5** · $(1/2)^x \rightarrow$ **1, 0,5, 0,125, 4**. Ejercicio 5: a) **C** b) **D** c) **C** d) **D**. Ejercicio 6: a) máximo en $t = -20/(2 \cdot -5) =$ **2 s**, altura **20 m**; cae cuando $h = 0$, en **t = 4 s** b) $200 \cdot 2^6 =$ **12 800 bacterias** c) $18\,000 \cdot 0,85^4 =$ **9 396,06 €**. Ejercicio 7: $x = 1 \rightarrow$ **1 y 2** · $x = 4 \rightarrow$ **16 y 16** · $x = 10 \rightarrow$ **100 y 1 024**. Empatán en $x = 2$ y en $x = 4$; a partir de **x = 5** gana 2^x definitivamente. Ejercicio 8: a) el vértice está en **x = -b/2a = 3**, no en 6; se ha olvidado dividir entre 2a b) una exponencial **no corta nunca** el eje X; en $x = 0$ corta el **eje Y**, en el punto $(0,1)$ c) con $a < 0$ la parábola abre hacia abajo y tiene **máximo**. El reto: $2^{63} =$ **9 223 372 036 854 775 808** granos en la última casilla.

Hoja de registro

Esta hoja es para el docente. Marca C en lo conseguido, EP en lo que va con ayuda y NC en lo que aún no aparece.

1. Determina orientación y vértice de una parábola. C [] EP [] NC []
2. Halla los cortes con los ejes. C [] EP [] NC []
3. Representa con los cinco puntos clave. C [] EP [] NC []
4. Calcula valores de una exponencial. C [] EP [] NC []
5. Distingue crecimiento de decrecimiento. C [] EP [] NC []
6. Resuelve problemas de altura y de crecimiento. C [] EP [] NC []

Cómo leer el conjunto

El 7 es el corazón de la ficha. Ver que en $x = 4$ empatan y que en $x = 10$ no hay color explica de una vez por qué «exponencial» no significa «rápido», sino «cada vez más rápido».

El 6a es el problema clásico y a la vez el más útil: el vértice de la parábola es el punto más alto de verdad, no una fórmula.

Si el 1 sale bien y el 2c falla, el hueco no está en funciones: está en el discriminante de las ecuaciones de segundo grado, que es de 3.º.